

2. Übung zu Methoden der Signalverarbeitung

Grundlagen

1 Energiesignale und Skalierung

1.1 Energiesignale

Energiesignale sind Funktionen über der Zeit mit einer endlichen *Signalenergie*

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt < \infty.$$

Das Betragsquadrat eines Energiesignals $|x(t)|^2$ kann somit als *zeitliche Energiedichte* interpretiert werden. Die Signalenergie entspricht der quadratischen Norm des Signals $x(t)$:

$$E_x = \|x(t)\|^2 = \langle x(t), x(t) \rangle$$

Nach dem Satz von PARSEVAL ist das Innenprodukt zweier Signale gleich dem Innenprodukt ihrer Spektren:

$$\langle x(t), y(t) \rangle = \langle X(f), Y(f) \rangle$$

Daher kann die Energie auch aus dem Spektrum des Signals berechnet werden:

$$E_x = \langle X(f), X(f) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df$$

Analog zur zeitlichen Energiedichte $|x(t)|^2$ lässt sich das Betragsquadrat des Spektrums $|X(f)|^2$ als *spektrale Energiedichte* deuten.

Zur Charakterisierung eines Signals dienen die ersten beiden Momente der normierten Energiedichten. Sie geben Auskunft darüber, in welchem Zeit- und Frequenzbereich die Signalenergie konzentriert ist. Die *mittlere Zeit* t_x und die *mittlere Frequenz* f_x sind jeweils als erstes gewöhnliches Moment definiert

$$t_x = \int_{-\infty}^{\infty} t \frac{|x(t)|^2}{\|x(t)\|^2} dt = \frac{1}{\|x(t)\|^2} \langle t \cdot x(t), x(t) \rangle$$

$$f_x = \int_{-\infty}^{\infty} f \frac{|X(f)|^2}{\|X(f)\|^2} df = \frac{1}{\|X(f)\|^2} \langle f \cdot X(f), X(f) \rangle,$$

die *Zeitdauer* Δ_t und die *Bandbreite* Δ_f als zweites zentrales Moment

$$\Delta_t^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (t - t_x)^2 \frac{|x(t)|^2}{\|x(t)\|^2} dt$$

$$\Delta_f^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (f - f_x)^2 \frac{|X(f)|^2}{\|X(f)\|^2} df.$$

Die Zeitdauer und die Bandbreite geben an, wie kompakt ein Signal im Zeit- bzw. Frequenzbereich ist. Beide Größen können für ein Signal nicht gleichzeitig beliebig klein sein. Es muss die HEISENBERGSche Unschärferelation der Nachrichtentechnik erfüllt sein

$$\Delta_t \cdot \Delta_f \geq \frac{1}{4\pi}.$$

Ist ein komplexes bzw. harmonisches Signal durch Betrag und Phase gegeben, dann lässt sich die mittlere Frequenz und die Bandbreite auf folgende Weise berechnen

$$f_x = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{\varphi}(t) \frac{|x(t)|^2}{\|x(t)\|^2} dt$$

$$\Delta_f^2 = \frac{1}{4\pi^2} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\dot{A}(t))^2}{\|x(t)\|^2} dt + \int_{-\infty}^{\infty} (\dot{\varphi}(t) - 2\pi f_x)^2 \frac{|x(t)|^2}{\|x(t)\|^2} dt \right).$$

Ein weiteres Maß für die Konzentration der Signalenergie sind die *effektive Zeitdauer* T_{eff} und die *effektive Bandbreite* F_{eff} . Sie sind folgendermaßen definiert:

$$T_{\text{eff}} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|x(t)|}{x_{\max}} dt$$

$$F_{\text{eff}} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|X(f)|}{X_{\max}} df$$

1.2 Skalierung

Wird ein Signal $x(t)$ mit dem reellen Faktor $a \in \mathbb{R}$ skaliert, ist das skalierte Signal gegeben durch

$$x_a(t) = x\left(\frac{t}{a}\right).$$

Ein Skalierungsfaktor $a > 1$ bewirkt eine Streckung, ein Skalierungsfaktor $a < 1$ eine Stauchung des Signals in Zeitrichtung. Beachtet man nun, dass durch die Skalierung das Zeitdauer-Bandbreite Produkt konstant bleibt, so ergibt sich, dass bei der Skalierung sich die Frequenzfunktion $X_a(f)$ genau umgekehrt zur Funktion über der Zeit $x_a(t)$ verhält:

$$X_a(f) = |a| \cdot X(a \cdot f).$$

Daraus folgt, dass sich einige Eigenschaften des skalierten Signals ändern (vgl. Tabelle 1).

Eigenschaft	Zusammenhang
Energie	$E_{xa} = a \cdot E_x$
mittlere Zeit	$t_{xa} = a \cdot t_x$
Zeitdauer	$\Delta_{ta} = a \cdot \Delta_t$
mittlere Frequenz	$f_{xa} = \frac{1}{a} f_x$
Bandbreite	$\Delta_{fa} = \frac{1}{a} \cdot \Delta_f$

Tabelle 1: Eigenschaften der Skalierung

Beispiel 1 (Kennwerte eines modulierten, verrauschten Gauß-Impulses)

Das folgende Beispiel soll die verschiedenen besprochenen Charakteristika eines Signals veranschaulichen. Als Ausgangssignal $x(t)$ (vgl. Abbildung 1(a)) wird ein modulierter Gauß-Impuls verwendet, dem stochastisches Rauschen überlagert ist. Das Signal kann daher analytisch nicht angegeben werden. Zum Vergleich wird der Gauß-Impuls mit dem Faktor 1,5 skaliert und ebenfalls mit Rauschen überlagert (vgl. Abbildung 1(b)). Es ergeben sich die in Tabelle 2 dargestellten Charakteristika.

Skalierung	$a = 1$	$a = 1,5$
Signalenergie	$E_x = 0,906336$	$E_x = 1,353229$
Mittlere Zeit	$t_x = -0,005843$	$t_x = 0,015728$
Mittlere Frequenz	$f_x = 16,488890$	$f_x = 10,663458$
Zeitdauer	$\Delta_t = 0,733233$	$\Delta_t = 1,07563$
Bandbreite	$\Delta_f = 108,888$	$\Delta_f = 71,3287$
Effektive Zeitdauer	$T_{\text{eff}} = 1,54599$	$T_{\text{eff}} = 2,1888$

Tabelle 2: Charakteristika eines verrauschten Gauß-Impulses



2 Hilberträume

Definition 2 (Hilbertraum)

Ein Hilbertraum erfüllt folgende Eigenschaften:¹

1. Vektoraddition

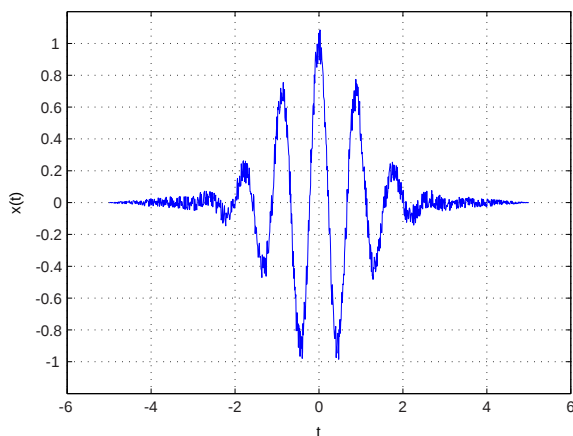
Es ist eine Vektoraddition mit folgenden Eigenschaften definiert:

- L1: $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$ (Kommutativgesetz)
- L2: $\mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = (\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z}$ (Assoziativgesetz)
- L3: $\exists \mathbf{0} : \mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{x}$ (neutrales Element)
- L4: $\exists (-\mathbf{x}) : \mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ (inverses Element)

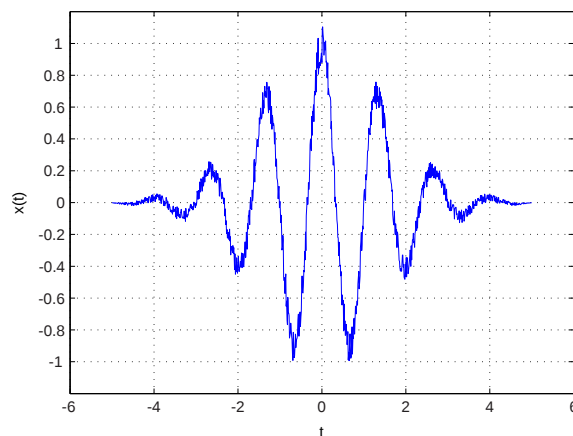
2. Skalare Multiplikation

Es ist eine skalare Multiplikation mit folgenden Eigenschaften definiert:

¹Im Folgenden werden die Elemente des Hilbertraumes fett dargestellt und allgemein als Vektoren bezeichnet.



(a) Gemessenes Signal $x(t)$



(b) Gemessenes Signal $x(t)$ skaliert mit $a = 1,5$

Abbildung 1

$$L5: 1 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}$$

$$L6: (c_1 c_2) \mathbf{x} = c_1 (c_2 \mathbf{x})$$

$$L7: c(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = c\mathbf{x} + c\mathbf{y}$$

$$(c_1 + c_2) \mathbf{x} = c_1 \mathbf{x} + c_2 \mathbf{x}$$

(Assoziativgesetz)

(Distributivgesetz)

3. Innenprodukt

Es ist ein Innenprodukt mit folgenden Eigenschaften definiert:

$$IP1: \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \geq 0 \quad \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

(positive Definitheit)

$$IP2: \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle^*$$

(Kommutativgesetz)

$$IP3: \langle \mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle$$

$$IP4: \langle c\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = c \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$$

4. Norm

Mit Hilfe des Innenproduktes ist eine Norm definiert:

$$\|\mathbf{x}\| := \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}$$

5. Metrik

Mit Hilfe der Norm ist eine Metrik definiert:

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$$

6. Vollständigkeit

Der Hilbertraum ist vollständig. ■

Aus den Axiomen können bezüglich des Innenproduktes folgende Sätze abgeleitet werden:

Satz 3 (Vertauschung des Skalars)

$$\langle c\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, c^* \mathbf{y} \rangle$$

■

Satz 4 (Schwarzsche Ungleichung)

$$|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle|^2 \leq \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \cdot \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle = \|\mathbf{x}\|^2 \cdot \|\mathbf{y}\|^2$$

■

Der abstrakte Begriff des Hilbertraums soll im Folgenden an zwei Beispielen veranschaulicht werden.

Beispiel 5 ($\mathbb{C}^n$)

Über der Menge der n -dimensionalen komplexen Zahlen $\mathbb{C}^n$ wird ein Hilbertraum definiert.

- Elemente: n -Tupel komplexer Zahlen $\mathbf{x} = [x_1, \dots, x_n]$.
- Innenprodukt: $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^T \mathbf{y}^*$.
- Norm: $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle} = \sqrt{\mathbf{x}^T \mathbf{x}^*} = |\mathbf{x}|$.
- Metrik: $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$.

■

Beispiel 6 (Funktionsraum der Energiesignale)

Über der Menge der Energiesignale wird ein Hilbertraum definiert.

- Elemente: Energiesignale $x(t)$.
- Innenprodukt: $\langle x(t), y(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) y^*(t) dt$.
- Norm: $\|x(t)\| = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt} = \sqrt{E_x}$.
- Metrik: $d(x(t), y(t)) = \|x(t) - y(t)\| = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |x(t) - y(t)|^2 dt} = \sqrt{E_{x-y}}$.

■

Die abstrakte Schreibweise mit Innenprodukten ist nützlich, da sie es ermöglicht, komplexe Überlegungen direkt auf verschiedene Hilberträume anzuwenden, beispielsweise über der Menge der zeitkontinuierlichen, der zeitdiskreten oder der stochastischen Signale. Dazu muss für die jeweilige Signalklasse lediglich ein geeignetes Innenprodukt definiert werden.

Definition 7 (Basis)

Die Vektoren $\varphi, i = 1, \dots, n$ heißen Basis, wenn sie einen Hilbertraum Φ vollständig aufspannen und linear unabhängig sind, d. h. die Gramsche Matrix

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \langle \varphi_1, \varphi_1 \rangle & \langle \varphi_2, \varphi_1 \rangle & \dots & \langle \varphi_n, \varphi_1 \rangle \\ \langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle & \langle \varphi_2, \varphi_2 \rangle & \dots & \langle \varphi_n, \varphi_2 \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \varphi_1, \varphi_n \rangle & \langle \varphi_2, \varphi_n \rangle & \dots & \langle \varphi_n, \varphi_n \rangle \end{bmatrix}$$

ist regulär.

■

Sonderfälle sind die *orthogonale Basis*, bei der nur die Elemente der Hauptdiagonalen der Gramschen Matrix von Null verschieden sind sowie die *orthonormale Basis*, bei der die Gramsche Matrix der Einheitsmatrix entspricht.

Wird ein Vektor $\mathbf{x}$ als Linearkombination der Basisvektoren dargestellt, dann werden die Koeffizienten durch die Gleichung

$$\mathbf{a} = \mathbf{G}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \langle \mathbf{x}, \varphi_1 \rangle \\ \langle \mathbf{x}, \varphi_2 \rangle \\ \vdots \\ \langle \mathbf{x}, \varphi_n \rangle \end{bmatrix}$$

berechnet. Bei einem *Frame* wird auf die Inversion der Gramschen Matrix verzichtet. Die Koeffizienten lauten hier:

$$a_i = \langle \mathbf{x}, \varphi_i \rangle$$

Definition 8 (Frame)

Die Vektoren $\varphi, n = 1, \dots, N$ heißen *Frame*, wenn sie einen Hilbertraum Φ vollständig aufspannen und wenn für die Koeffizienten a_i der Reihenentwicklung eines Vektors $\mathbf{x}$ gilt:

$$0 < A \cdot \|\mathbf{x}\|^2 \leq \sum_{i=1}^n |a_i|^2 \leq B \cdot \|\mathbf{x}\|^2 < \infty$$



Aufgabe 1: Energiesignale

Für die Berechnung der Kenngrößen von Energiesignalen sind folgende Hilfssätze in der Praxis von Nutzen:

- a) Zeigen Sie, dass sich jede beliebige reelle Funktion $x(t)$ durch die Summe einer geraden Funktion $x_g(t)$ und einer ungeraden Funktion $x_u(t)$ darstellen lässt.
- b) Gegeben ist ein gerades Energiesignal $x(t)$. Zeigen Sie, dass das Signal eine mittlere Zeit $t_x = 0$ besitzt.
- c) Gegeben ist ein ungerades Energiesignal $x(t)$. Zeigen Sie, dass das Signal ebenfalls eine mittlere Zeit $t_x = 0$ besitzt.
- d) Was ist die Konsequenz aus obigen Aussagen bezüglich der Zerlegung eines Signals $x(t)$ in seinen geraden $x_g(t)$ und in seinen ungeraden $x_u(t)$ Anteil?
- e) Gegeben sei ein zeitlich verschobenes Energiesignal $x(t - T)$. Zeigen Sie, dass dessen mittlere Zeit t_x um den Wert $+T$, gegenüber der mittleren Zeit des nicht verschobenen Signals $x(t)$, vergrößert ist.

Aufgabe 2: Exponentialfunktion

Gegeben ist folgendes Signal.

$$x(t) = e^{-\beta|t|}, \quad \beta > 0$$

- a) Zeichnen Sie das Signal für $\beta = 1$ im Zeit und Frequenzbereich.
- b) Berechnen Sie die Energie E_x des Signals für ein beliebiges β . Handelt es sich um ein Energiesignal?
- c) Berechnen Sie die ersten Momente der normierten Energiedichten und stellen Sie fest, in welchem Zeitpunkt t_x bzw. bei welcher Frequenz f_x sich das Signal konzentriert.
- d) Bestimmen Sie die Zeitdauer Δ_t und die Bandbreite Δ_f .
- e) Berechnen Sie die Unschärfe des Signals und vergleichen Sie diese mit der minimalen Unschärfe nach HEISENBERG.

Aufgabe 3: Skalierung

Gegeben ist ein periodisches Signal $x(t)$ mit einer Frequenz von $f_0 = \frac{4}{\pi}$.

$$x(t) = \sin(2\pi f_0 t)$$

Dieses Signal wird mit einem Rechteckfenster der Länge $T = \pi$ gefenstert. Anschließend wird das gefenster-te Signal einmal mit $a_1 = 2$ und mit $a_2 = \frac{1}{2}$ skaliert.

- a) Zeichnen Sie das gefensterte Signal $x^w(t)$, sowie die beiden skalierten Signale $x_{a_1}^w(t)$ und $x_{a_2}^w(t)$.
- b) Berechnen Sie die Fouriertransformierten der drei Signale $X^w(f)$, $X_{a_1}^w(f)$ und $X_{a_2}^w(f)$. Zeichnen Sie jeweils die Betragsfunktionen.
- c) Bestimmen Sie die mittlere Zeit t_x der drei Signale $x^w(t)$, $x_{a_1}^w(t)$ und $x_{a_2}^w(t)$.

Aufgabe 4: Signaldarstellung in Funktionenräumen

- a) Zeigen Sie, dass die zeitverschobenen Rechteckimpulse

$$\varphi_n(t) = r_T(t - nT) \quad n = 1, \dots, N$$

eine orthogonale Basis bilden. Berechnen Sie die Koeffizienten a_n der Basisentwicklung eines Signals $x(t)$. Wie lassen sich diese anschaulich interpretieren?

- b) Zeigen Sie, dass jede orthogonale Basis die Frame-Bedingung

$$0 < A \cdot \|x(t)\|^2 \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n|^2 \leq B \cdot \|x(t)\|^2 < \infty$$

erfüllt. Wie lauten die Frame-Faktoren A und B ?

- c) Zeigen Sie folgenden Zusammenhang: Wenn sich in einem Funktionensystem $\{\varphi_n(t), n = 1, \dots, N\}$ die Funktion $\varphi_N(t)$ als Linearkombination der anderen Funktionen darstellen lässt

$$\varphi_N(t) = \sum_{n=1}^{N-1} a_n \varphi_n(t)$$

dann ist die Gramsche Matrix singulär.